

Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador geométrico

Luis Guillermo de la Rosa Jiménez

Escuela Nacional Preparatoria Plantel “Pedro de Alba” UNAM, México D.F.

luis@geometriadinamica.org

Modalidad: Uso de nuevas Tecnologías en la enseñanza de las matemáticas

Resumen: Se aborda el concepto de parábola en diversas formas. Se realizan conexiones entre las diferentes maneras de introducir el concepto. A partir de una metodología similar se pueden estudiar las otras cónicas. Primeramente se construye la definición geoméricamente; después, se reconocen los elementos básicos de la parábola; y, finalmente, se relacionan las construcciones con estos mismos conceptos en el lenguaje de la geometría analítica. Se encuentra la ecuación de la parábola en distintas posiciones con respecto a los ejes coordenados. Se establece una metodología para abordar el aprendizaje de las cónicas y se ejemplifica con el caso de la parábola. Se utiliza el procesador geométrico¹⁰ GeoGebra⁸ para apoyar la realización de las actividades propuestas. Debo mencionar que las actividades propuestas se han trabajado sistemáticamente con alumnos de ENP Plantel 9 “Pedro de Alba” durante dos años y se puede trabajar directamente sobre ellas en el Internet en la página de <http://geometriadinamica.org>

Palabras claves: Parábola, cónicas, procesador geométrico¹⁰, GeoGebra⁸.

Introducción

La tendencia actual de los planes de estudio del nivel medio superior en México, al estudiar las cónicas, es que centran su atención en desarrollar las cónicas desde el punto de vista de la geometría analítica y dejar de lado los conocimientos obtenidos en forma sintética. Es indispensable complementar las dos visiones para lograr una comprensión mejor en los alumnos.

Es importante mencionar que el conocimiento que los griegos por parte de Apolonio de Perga (Vera 1970)² desarrollaron sobre las cónicas es muy amplio utilizando lenguaje retórico (Vera 1970)⁴ que, posteriormente, se requirió del uso formal del lenguaje simbólico avanzado (The Geometrý of René Descartes)⁴. Las definiciones de las cónicas se obtienen a partir de propiedades de distancias entre puntos y rectas. No es necesario tener recurrir a un sistema de coordenadas cartesianas para construir las cónicas; es suficiente determinar las medidas entre los objetos que determinan la propiedad que define a la cónica en estudio (Boyer 1986)⁵. Se quiere mostrar la ventaja que conlleva tratar de combinar los métodos de la geometría analítica y el método sintético.

Es importante mencionar que durante el desarrollo de las actividades los alumnos además de comprender el concepto de parábola pueden desarrollar un manejo efectivo de los elementos principales de un software de geometría dinámica. Ya que con el desarrollo de las actividades la explicación del manejo del software se vuelve cada vez menos necesaria conforme el alumno avanza en el desarrollo de las actividades y por lo cual las actividades planteadas posteriormente pueden involucrar relaciones más complejas ya que el alumno puede manipular con mayor facilidad el software.

La importancia del estudio se debe a que las actividades se realizan en una secuencia la cual no empieza a partir de la definición de un sistema de coordenadas, que es bastante común de realizar cuando se está enseñando la parábola, sino que aprovechando la definición puramente geométrica de ella. Lo cual nos lleva al uso de la definición geométrica para poder observar propiedades relevantes de la parábola. Tenemos que en la Escuela Secundaria (SEP 1996)⁶ la atención en la geometría es únicamente desde el punto de vista sintáctico, por lo cual vale la pena retomar muchos de los conocimientos que tienen los alumnos para abordar el concepto de parábola y no solo desde una perspectiva puramente analítica.

Desarrollo

Se desarrolla la construcción de la parábola y algunas alternativas para poder abordar este tema. Una característica de la actividad cognitiva de los alumnos es aprovechar el uso de varios registros de representación semióticos como es el caso del registro algebraico o el registro geométrico (Duval¹ 1995). Además se debe considerar que los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción como ocurre en la mayoría de otras disciplinas. Por lo cual Duval¹ plantea interrogantes claves en relación con el aprendizaje: ¿cómo aprender a cambiar de registro? Y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él? En este trabajo se propone trabajar con varias representaciones del concepto parábola para después discutir las conversiones convenientes entre esas representaciones con lo cual se logrará una mejor comprensión del mismo. Se construye una parábola utilizando su definición geométrica que depende únicamente de la directriz y su foco, llevando al alumno a discutir temas adicionales como lo son la distancia de un punto a una recta, mediatriz de un segmento, la construcción de un lugar geométrico utilizando un software de Geometría Dinámica y otros temas afines. Posteriormente se realizan actividades para que los alumnos puedan observar los elementos más importantes de la parábola así como las relaciones existentes entre ellos. Finalmente, se proponen actividades para la construcción de la ecuación de la parábola en sus casos más elementales.

Es necesario aprovechar este trabajo para poder lograr en los alumnos un mejor manejo del software de Geometría Dinámica (procesador geométrico) que en nuestro caso se trata de GeoGebra⁸ pero que puede ser cualquiera que el lector le resulte conveniente.

El desarrollo de este trabajo se realizó con el planteamiento de varias actividades que se encuentran disponibles en Internet en la dirección siguiente:

<http://geometriadinamica.org/actividad/Actividades/trabajo.htm>

A continuación se describirán brevemente las actividades desarrolladas:

Actividad 1 y 2 Reconociendo GeoGebra⁸ y algunos elementos básicos

La primera práctica es descriptiva con respecto al uso del Geogebra⁸ ya que es necesario explicar de manera básica el manejo del software. El objetivo de estas primeras actividades es lograr una introducción básica a GeoGebra. Posteriormente se pide a los alumnos el reconocimiento de un lugar geométrico muy elemental.

La segunda de estas prácticas tiene por objeto que el alumno tenga una primera aproximación con la definición de la parábola,

Para lograr lo anterior se pide al alumno la construcción de una recta arbitraria (directriz de la parábola) en el plano y un punto F (foco de la parábola). Después se construye un punto arbitrario P el cual tendrá la función de constructor de la parábola. A partir de P medimos su distancia a la recta y al punto F . Este punto es utilizado por los alumnos para acomodar puntos que satisfagan las condiciones de la parábola con la directriz y el foco dado.

Además la actividad es aprovechada para que los alumnos reflexionen sobre el concepto de distancia de un punto a una recta, pidiéndoles a los alumnos que se construya una definición de la distancia de un punto a una recta.

Actividad 3 Buscando otra manera de construcción

El objetivo de la actividad 4 es poder observar algunas propiedades geométricas de la parábola así como mostrar otros elementos de la parábola como son vértice y eje de simetría. Para ello se realiza una construcción de la parábola utilizando una recta tangente a ella y una perpendicular a la directriz. En esta actividad los alumnos comprueban que todos los puntos que construyeron en la actividad anterior se pueden encontrar también con una construcción más general.

Actividad 4 La construcción elemental

En esta actividad se hace énfasis en la construcción más simple para encontrar a la parábola, tomando un punto I sobre la directriz y construyendo su mediatriz con el punto F y después por I se construye una perpendicular por I a la directriz y la intersección de la última recta con la mediatriz será el punto que determine la parábola.

Actividad 5 Otra construcción de la parábola

En esta actividad se construye a la parábola utilizando un punto sobre el eje de la parábola, para posteriormente trazar una paralela a la directriz y con la ayuda de una circunferencia adecuada se pueden encontrar dos puntos de la parábola.

Actividad 6 Propiedades de la parábola

Para esta actividad es necesario que los alumnos ya sean capaces de construir con facilidad una parábola dado su foco y su directriz. Por lo que a partir de esta construcción se puede analizar algunas de las propiedades más importantes de la parábola como son la construcción de una recta tangente a un punto dado, además de analizar las propiedades de reflexión que tiene un rayo cuando este es paralelo al eje de la parábola. También se analizan las propiedades de las cuerdas focales y las condiciones necesarias para que su longitud sea mínima.

Actividad 7 Ecuación de la parábola

En esta actividad se pide a los alumnos realizar una construcción parecida a la de la actividad 1, pero con la condición de que la directriz sea la recta $x = -p$ y el foco tenga coordenadas $(p, 0)$. Esto para facilitar las operaciones de los alumnos. Para construir la parábola se les pidió

tomar un punto P arbitrario en el plano cartesiano y calcular sus coordenadas con el GeoGebra⁸. A continuación se les pidió a los alumnos calcular la distancia entre el punto P y el punto F utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos. De la misma manera se construye una perpendicular por P a la directriz y se encontró el punto de intersección I entre la directriz y la perpendicular el cual define la distancia del punto P a la directriz. A continuación se pide calcular las coordenadas del punto I y con estas coordenadas se encontró la distancia del punto P al punto F . Posteriormente utilizando el punto P se encontraron más puntos moviendo el punto P a donde se cumplieran las condiciones de igualdad.

Se pide también a los alumnos reflexionar sobre las operaciones que está realizando la computadora cada que se mueve el punto P , así como el significado de la igualdad entre dos cantidades variables. Finalmente se sugiere a los alumnos encontrar alguna simplificación algebraica de las ecuaciones que determinaron la construcción de los puntos. En particular que encuentren un despeje de la variable x y otro despeje de la variable y para que con ellos puedan construir funciones adecuadas que coincidan exactamente con sus puntos construidos previamente. Con lo cual logramos transitar de una construcción puramente sintética a la ecuación planteada por Descartes⁴.

Podemos mencionar que la actividad 2 y esta actividad son muy parecidas y en ellas se observa que el método sintético coincide en muchos aspectos con el método analítico, ya que se lograron construcciones similares utilizando métodos distintos.

En el desarrollo de las actividades se puede observar algunas etapas:

- I. El reconocimiento de la parábola desde el punto de vista geométrico, es decir se busca que los alumnos construyan una definición propia de ella. También se busca que los alumnos construyan la parábola de distintas maneras.
- II. Después se quiere que los alumnos reconozcan algunas de las propiedades más importantes de la parábola. Como son propiedades de tangencia y de reflexión de la parábola.
- III. Se quiere que los alumnos construyan la parábola utilizando el sistema de coordenadas cartesianas. Por lo cual se repasan conceptos como distancia de un punto a una recta y distancia entre dos puntos. Posteriormente se pide al alumno que reflexiona sobre el significado de un punto variable (x,y) y las condiciones necesarias para que estas dos variables se relacionen por medio de una ecuación.

Resultados

Las actividades propuestas se llevaron a cabo con alumnos de ENP Plantel 9 “Pedro de Alba” y son muchas las observaciones que se pueden hacer sobre el desarrollo de su trabajo, pero se mencionarán las más relevantes:

- La mayoría de los alumnos que originalmente no presentaron dificultad para comprender la materia no mostraron mucho interés en aprender a manipular el software.
- Por otra parte los alumnos que no se les facilita la materia presentaron en la mayoría de los casos un gran interés por el desarrollo de las actividades. Ya que lograron visualizar conceptos que en una clase dada de manera tradicional no lo hubieran logrado.

- Los alumnos fueron capaces en la mayoría de los casos de construir una definición propia de lo que es una parábola y lograron visualizar de mejor manera las propiedades más importantes de ella.
- Adicionalmente es importante mencionar que al finalizar las actividades la mayoría de los alumnos lograba realizar construcciones básicas dentro del software de geometría dinámica.
- El manejo adecuado del software permite de manera más simple extender este trabajo para el desarrollo de las demás cónicas ya que se puede desarrollara actividades de manera similar para las otras cónicas como es el caso de la Elipse y de la Hipérbola.

Conclusiones

Todo lo anterior nos muestra que la utilización de un procesador geométrico es muy conveniente para la mejor comprensión de muchos temas del curso de Matemáticas V y que por supuesto se puede extender esta ventaja a otros cursos del área de Matemáticas. También es importante recalcar la necesidad de que los profesores de la ENP trabajen más en el desarrollo de actividades adecuadas a los cursos que ellos están impartiendo basándose en las grandes ventajas que conlleva utilizar este tipo de software. Es importante mencionar que en el caso de GeoGebra⁸ puede utilizarse directamente en internet por lo que un trabajo posterior puede ser llevar estas actividades a un entorno WEB en donde los alumnos puedan interactuar directamente con las actividades y desarrollarlas dentro de la WEB.

Referencias

1. Duval, Raymond (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. Suisse.
2. VERA, F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de las más importantes obras de la Matemática griega: *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Colección Matemática* de Pappus, ...). Aguilar, Madrid, 1970.
3. Apolonio de Perga. *Las Cónicas* (en *Científicos griegos*, Introducción y notas de F.Vera, Aguilar, Madrid, 1970).
4. The Geometry of René Descartes, Smith David E. and Lantham M. L. - 1925 - [Dover](#) 1954.
5. Boyer, C., *Historia de la Matemática*, Alianza, Madrid, 1986, p.208.
6. SEP. El libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria. México, 1996, p. 169-270.

SITIOS EN LA RED

7. Víctor M. Hernández L. La Geometría Analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? Recuperado el 10 de Febrero 2009 de: <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf>
8. Página de GeoGebra <http://www.geogebra.org/cms/> (10 de Marzo)
9. Actividades planteadas en: <http://geometriadinamica.org/actividad/Actividades/trabajo.htm> (10 de Marzo)
10. Miranda Molina Rafael. ¿Qué es un procesador Geométrico? Recuperado el 10 de Febrero 2009 de: http://www.geometriadinamica.cl/articulos/proc_geom.pdf